5/11/15

$\bar{y}' = \bar{f}(x, \bar{y})$, $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n + b_1 \\ y_2' = a_{21}y_1 + \dots + a_{2n}y_n + b_2 \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n + b_n \end{cases}$$

με a_{ij} $(i,j = 1, \dots, n)$ και b_i $(i = 1, \dots, n)$ είναι συναρτήσεις ορισμένες σ' ένα διάστημα I, $C(I)$.

Θέτοντας

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ και } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

το γραμμικό διαφορικό σύστημα γράφεται : $y' = Ay + b$.

Θεώρημα

Θεωρώ το Π.Α.Τ, $\bar{y}' = A(x)\bar{y} + \bar{b}$ $x \in I$, $y(x_0) = \bar{y}_0$ $x_0 \in I$, $\bar{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ με $A(x)$ και $\bar{b}(x)$ συνεχείς στο I. Τότε $\forall x_0 \in I$, $\forall \bar{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ το Π.Α.Τ έχει μοναδική λύση.

*(Σαν άσκηση (προαιρετικό) να δειχθεί ότι ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz, η $\bar{y}' = A(x)\bar{y} + \bar{b}$).

- $y_1' = \sin x\, y_1 + (\cos^2 x + x^2) y_2 + \log x$ $(x > 0)$.
  $y_2' = (x^2 + 3x) y_1 + e^{x^2} y_2 + 1/x$.
  $y_1(1) = 3$, $y_2(1) = 7$.

$$A(x) = \begin{pmatrix} \sin x & \cos^2 x + x^2 \\ x^2 + 3x & e^{x^2} \end{pmatrix} \qquad \bar{b}(x) = \begin{pmatrix} \log(x) \\ 1/x \end{pmatrix}$$

$I = (0, +\infty)$, το παραπάνω έχει ακριβώς μια λύση βάσει θεωρήματος.

- Γραμμική διαφορική εξίσωση n-τάξης

(E) $\alpha_n(x) y^{(n)} + \alpha_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + \alpha_1(x) y' + \alpha_0(x) y = b(x)$

$x \in I$, $\alpha_i \in C(I)$ $(i = 0, \dots, n)$ $\alpha_n(x) \neq 0$ $\forall x \in I$.

*(αν $\alpha_n = 0$ τότε χωρίζω το διάστημα εκεί που μηδενίζεται και ελέγχω-εξετάζω, προφανώς για ένα από τα δύο θα ορίζεται και για όλο).

Τρόπος μετατροπής της παραπάνω γραμμικής διαφορικής εξίσωσης σε γραμμικό διαφορικό σύστημα.

Θέτω
$$\left.\begin{aligned} y_1 &= y \\ y_2 &= y' \\ y_3 &= y'' \\ &\vdots \\ y_n &= y^{(n-1)} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{και στη} && = y_1' \\ &\text{συνέχεια} \Rightarrow && = y_2' \\ &\text{γίνονται} && = y_3' \\ &\text{(παρατήρηση)} && \vdots = y_{n-1}' \end{aligned}$$

το y'_n που δεν το έχω, γίνεται:

$$y^{(n)} = -\frac{\alpha_0}{\alpha_n} y - \frac{\alpha_1}{\alpha_n} y' - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} y'' - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y^{(n-1)} + \frac{b}{\alpha_n}$$

$$y'_n = -\frac{\alpha_0}{\alpha_n} y_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_n} y_3 - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_n + \frac{b}{\alpha_n}$$

Επομένως:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{\alpha_0}{\alpha_n} & -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} & -\frac{\alpha_2}{\alpha_n} & \dots & -\frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_n} & -\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{\bar{y}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b/\alpha_n \end{pmatrix}}_{\bar{b}}$$

Παραδείγματα 1.2(v) σελίδα 5

$$(x^2+1)y'' - 5xy' + x^2 y = e^x, \quad y(2)=0, \quad y'(2)=1, \quad y''(2)=-3$$

$y_1 = y$
$y_2 = y' = y_1'$
$y_3 = y'' = y_2'$

Αυτό που μου λείπει είναι το y_3':

$$y_3' = (y'')' = y''' = \frac{5x}{x^2+1}\underset{\downarrow\, y_2}{y'} - \frac{x^2}{x^2+1}\underset{\downarrow\, y_1}{y} + \frac{e^x}{x^2+1}$$

$$y_3' = \frac{5x}{x^2+1} y_2 - \frac{x^2}{x^2+1} y_1 + \frac{e^x}{x^2+1}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-x^2}{x^2+1} & \frac{5x}{x^2+1} & 0 \end{pmatrix} \bar{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^x/x^2+1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

1.2(vi)

$$y_1'' - y_1 = 0 \quad , \quad y_1(0) = y_1'(0) = 1$$
$$y_2'' + xy_2' - y_2 = e^x \, , \; y_2(0) = 7 \, , \; y_2'(0) = 3$$

Θέτουμε: $y_1 = u_1$, $y_1' = u_2$, $y_2 = u_3$, $y_2' = u_4$, οπότε $u_1' = u_2$, $u_2' = u_1$, $u_3' = u_4$, $u_4' = -xu_4 + u_3 + e^x$, $u_1(0) = u_2(0) = 1$, $u_3(0) = 7$, $u_4(0) = 3$.

Άρα $u' = A(x)u + b(x)$, $u(0) = u_0$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}, \; u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} ; A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -x \end{pmatrix}, \; b(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ e^x \end{pmatrix}$$

- $A(x) = \begin{pmatrix} x^2 & 3x \\ \sin x & e^x \end{pmatrix}$, $x \in [-3, 10]$

(Πως θα βρεθεί στάθμη)

$$\|A(x)\| = \sup_{\|c\| \neq 0} \frac{\|A(x)\bar{c}\|}{\|\bar{c}\|} \le K \quad \forall x \in [-3, 10]$$

με $\bar{c} = (c_1, c_2)$

$$\sup_{\|c\| \neq 0} \frac{\left\| \begin{pmatrix} c_1x^2 + 3xc_2 \\ c_1 \sin x + c_2 e^x \end{pmatrix} \right\|}{\|\bar{c}\|} \le \sup_{|c_1| + |c_2| \neq 0} \frac{|c_1x^2 + 3xc_2| + |c_1 \sin x + c_2 e^x|}{|c_1| + |c_2|}$$

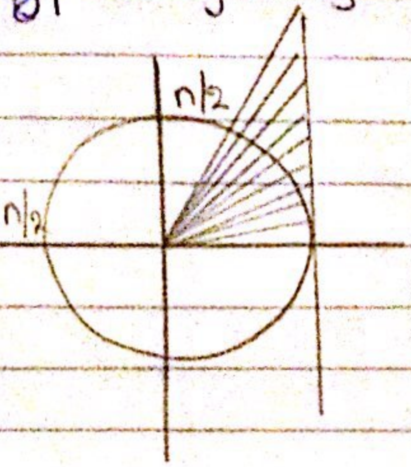
Λόγω κλειστού διαστήματος οι συναρτήσεις έχουν μέγιστα και ελάχιστα, μας νοιάζουν τα μέγιστα, συνεπώς:

$$(\text{συνέχεια...}) \le \sup \frac{100|c_1| + 30|c_2| + |c_1| + e^{10}|c_2|}{|c_1| + |c_2|}$$

δηλαδή $101|c_1| + (30 + e^{10})|c_2| \le \underbrace{(101 + 30 + e^{10})}_{K}(|c_1| + |c_2|)$

· A-12 φυλλάδιο λυμμένων σελίδα 9 (επισημάνσεις για την άσκηση)

$x = tg\,y \Rightarrow y(x) = ;$ (Βιβλίο Ντούγια Απ.1 σελίδα 271)



$(-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$

$(\pi/2, 3\pi/2) \to \mathbb{R}$

$\vdots$

καλύπταν το $\mathbb{R}$

$$y(x) = k\pi + \mathrm{Arctg}\frac{1}{\sqrt{e^{x^2}-1}}$$

A-27 φυλλάδιο λύσεων

$$y' = a y + b, \quad a, b \in C([0,+\infty))$$

(iii) $a(x) \ge k > 0$, $x \ge 0$

$|b(x)| \le M$, $x \ge 0$

$\Rightarrow \exists$ μοναδική λύση (φραγμένη) στο $[0,\infty) \to y(x) = -\int_x^\infty b(s) e^{\int_s^x a(t)dt} ds$, $x \ge 0$.

$$\int_x^\infty \left| b(s) e^{\int_s^x a(t)dt} \right| ds \le M \int_x^{+\infty} e^{\int_s^x a(t)dt} ds \le M \int_x^\infty e^{-k(s-x)} ds = e^{kx} \int_x^\infty e^{-ks} ds$$

$$k \le a(t)$$
$$k(s-x) \le \int_x^s a(t)dt$$
$$k(s-x) \le -\int_s^x a(t)dt$$
$$\int_s^x a(t)dt \le -k(s-x)$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(\int_x^t e^{-ks} ds\right) = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{-e^{-ks}}{k}\right]_x^t = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{e^{-kx}}{k} - \cancel{\frac{e^{-kt}}{k}}^{\to 0}\right],$$

άρα συγκλίνει.

*(Όταν έχω όριο στο άπειρο, πρώτα ελέγχω αν έχει νόημα, εάν συγκλίνει)